CURSO

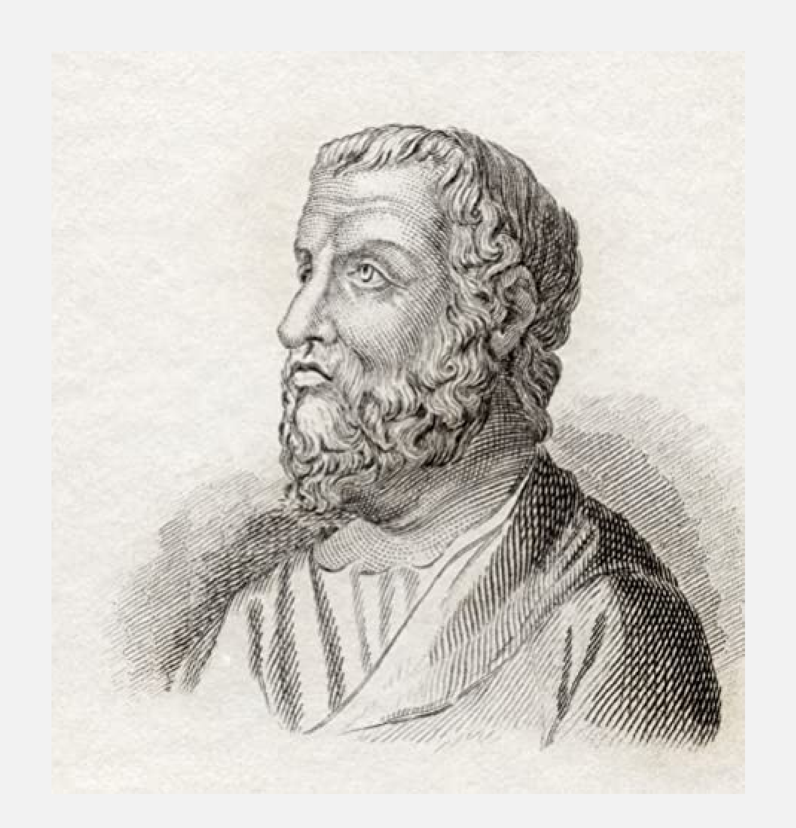
PRECÁLCULO 1

Autor: Alex Ruiz G. F.

INTRODUCCIÓN

En este primer tema repasamos los números reales, ecuaciones y el plano coordenado. Es probable que el lector ya se encuentre familiarizado con estos conceptos, pero es útil ver de nuevo cómo funcionan estas ideas para resolver problemas y modelar (o describir) situaciones prácticas.

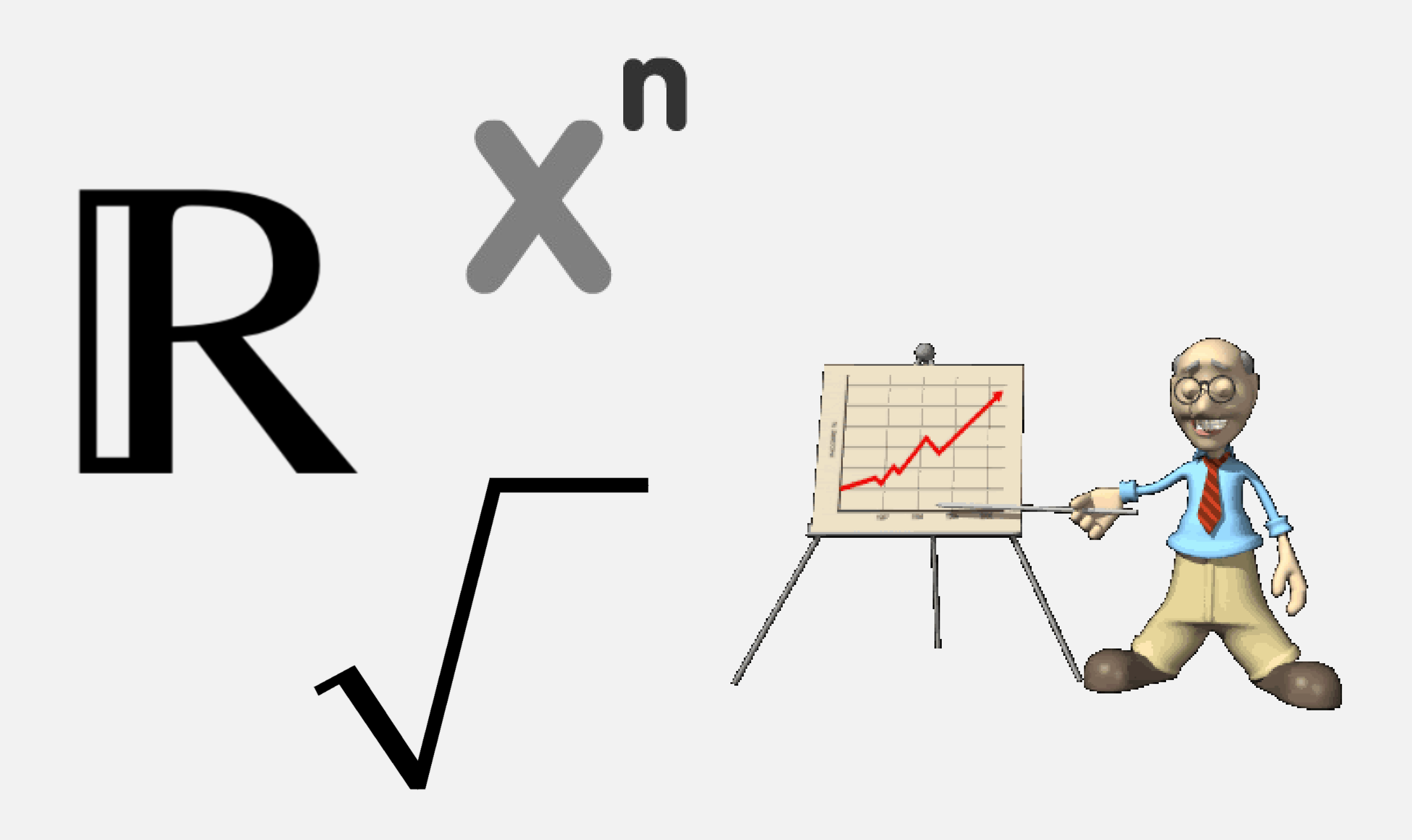
Veamos la forma en que todas estas ideas se usan en una situación real: suponga que a usted le pagan $9 por hora en su trabajo de tiempo parcial. Podemos modelar su paga y por trabajar x horas mediante la ecuación y 9x. Para averiguar cuántas horas necesita trabajar para que le paguen 200 dólares, resolvemos la ecuación $200 = 9x$. Graficar la ecuación y 9x en un plano coordenado nos ayuda a “ver” cómo aumenta la paga con las horas trabajadas.



"Las matemáticas son la gimnasia del espíritu y una preparación para la filosofía"

Isócrates

TEMA 1: NÚMEROS REALES, EXPONENTES Y RADICALES.



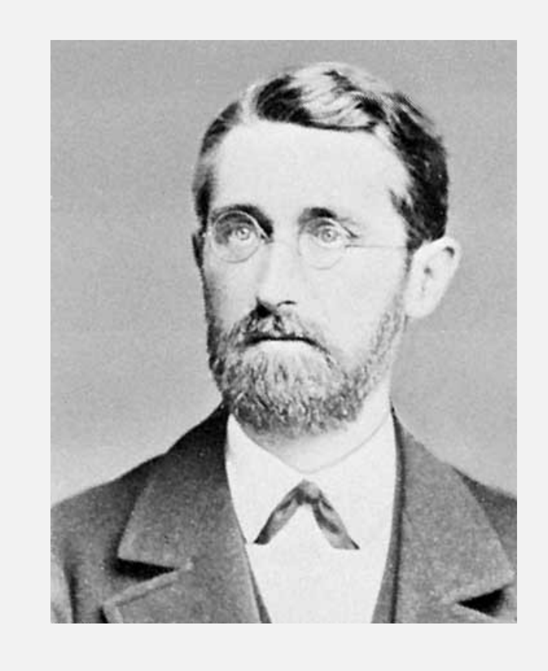
Glosario

- Antecedentes y concepto
- Definición
- Propiedades de los números reales
- Adición y sustracción
- Multiplicación y división
- La recta de números reales
- Conjuntos e intervalos
- Valor absoluto y distancia
- Axiomas



1. ANTECEDENTE Y CONCEPTO

El conjunto de los números reales abarca a los números racionales y a los números irracionales, pudiendo ser expresados por un número entero o un número decimal. El descubrimiento de estos números se atribuye a Pitágoras, famoso matemático griego.



Luego Richard Dedekind fundamentó y formalizó mediante la teoría de la recta real y creó la teoría de los ideales.

En matemáticas, el conjunto de los números reales incluye tanto los números racionales como los números irracionales; y en otro enfoque, a los trascendentes y a los algebraicos.

2. DEFINICIÓN

Definición informal

Repasemos los tipos de números que conforman el sistema de números reales. Empecemos con los **números naturales ($\mathbb{N}$):**

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

Los enteros($\mathbb{Z}$) constan de los números naturales junto con sus negativos y 0:

$$\ldots, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Construimos los **números racionales ($\mathbb{Q}$)** al tomar razones de enteros. Entonces, cualquier número racional Q puede expresarse como:

$$Q = \frac{n}{d}$$

donde n y d son enteros, d $\neq$ 0. Por ejemplo: $\frac{1}{2} \quad -\frac{3}{7} \quad 46 = \frac{46}{1} \quad 0.17 = \frac{17}{100}$

2. DEFINICIÓN

Definición informal

(Recuerde que una división entre 0 siempre se excluye, de modo que expresiones como 3/0 y 0/0 no están definidas.) También hay números reales, tales como, que no se pueden expresar como una razón entre enteros y por tanto se denominan **números irracionales(I)**. Se puede demostrar, con diferentes grados de dificultad, que estos números también son irracionales:

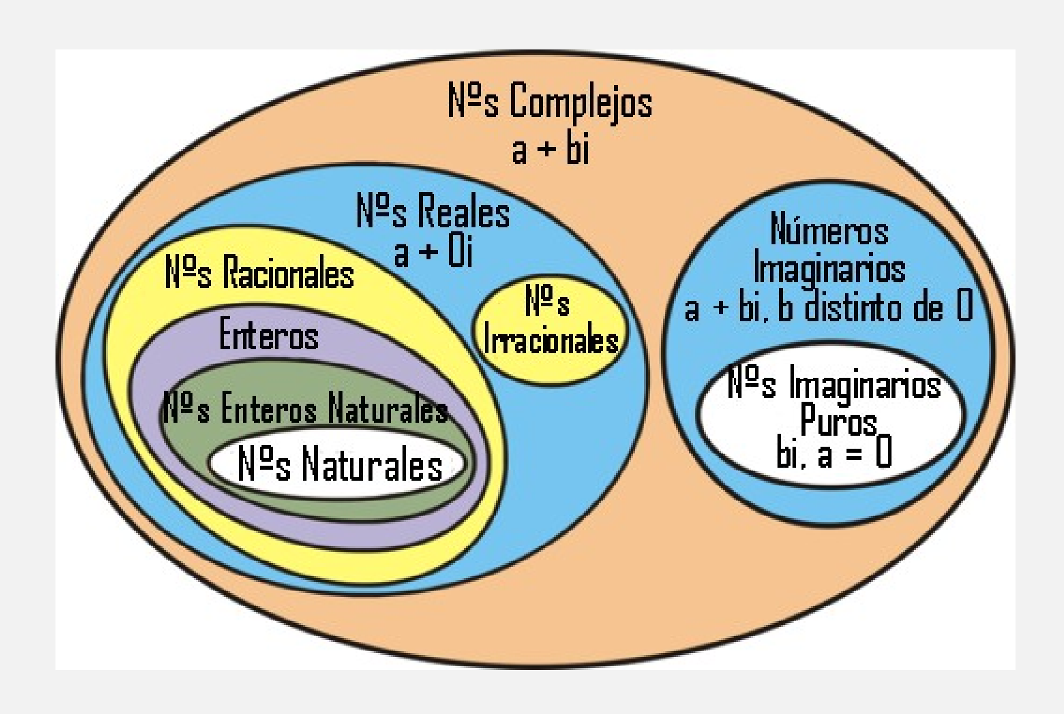
$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{2} \qquad \pi \qquad \frac{3}{\pi^2}$$

Por lo general el conjunto de todos los números reales se denota con el símbolo $\mathbb{R}$. Cuando usamos la palabra número sin más detalle, queremos decir "número real". La Figura 1 es un diagrama de los tipos de números reales con los que trabajamos en este libro.

NOTA 01
Los diferentes tipos de números reales fueron inventados para satisfacer necesidades específicas. Por ejemplo, los números naturales se necesitan para contar, los números negativos para describir una deuda o temperaturas bajo cero, los números racionales para conceptos como "medio galón de leche," y números irracionales para medir ciertas magnitudes, como la diagonal de un

2. DEFINICIÓN

Definición informal



Todo número real tiene una representación decimal. Si el número es racional, entonces su correspondiente decimal es periódico.

$$\frac{1}{2} = 0.5000\ldots = 0.5\overline{0}$$

$$\frac{157}{495} = 0.3171717\ldots = 0.3\overline{17}$$

(La barra indica que la sucesión de dígitos se repite por siempre). Si el número es irracional, la

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots$$

no es periódica.

$$\pi = 3.141592653589793\ldots$$

2. DEFINICIÓN

Definición

Si detenemos la expansión decimal de cualquier número en cierto lugar, obtenemos una aproximación al número. Por ejemplo, podemos escribir

$$\pi \approx 3.14159265$$

donde el símbolo ≈ se lee "es aproximadamente igual a". Cuantos más lugares decimales retengamos, mejor es nuestra

NOTA 02

Un número decimal periódico como x = 3.5474747. . .
es un número racional. Para convertirlo a una razón entre dos enteros, escribimos:
Por tanto, x = 3512 /990.. La idea es multiplicar x por las potencias apropiadas de 10 y luego restar para eliminar la parte periódica.

$$\begin{aligned} 1000x &= 3547.47474747\ldots \\ 10x &= 35.47474747\ldots \\ \hline 990x &= 3512.0 \end{aligned}$$

3. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Todos sabemos que 2 + 3 = 3 + 2, y 5 + 7 = 7 + 5, etc.
En álgebra, expresamos todos estos hechos (un infinito de ellos) si escribimos

$a + b = b + a$

donde a y b son dos números cualquiera. En otras palabras, “a + b = b + a” es una forma concisa de decir que “cuando sumamos dos números, el orden de adición no importa”. Este hecho se conoce como *Propiedad Conmutativa* de la adición.
De nuestra experiencia con números sabemos que las siguientes propiedades también son válidas.



3. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Propiedades generales.

Propiedades	Ejemplo	Descripción
Conmutativas		
a + b = b + a	7 + 3 = 3 + 7	Cuando sumamos dos números, el orden no importa.
ab = ba	3 * 7 = 7 * 3	Cuando sumamos tres números, no importa cuáles dos de ellos sumemos primero.
Asociativas		
(a + b) + c = a + (b + c)	(2 + 4) + 7 = 2 + (4 + 7)	Cuando multiplicamos dos números, el orden no importa.
(ab)c = a(bc)	(3 * 7) * 5 = 3 * (7 * 5)	Cuando multiplicamos tres números, no importa cuáles dos de ellos multiplicamos primero.
Distributivas		
a(b + c) = ab + ac (b + c)a = ab + ac	2.(5 + 6) = 2*5 + 2*6 (5 + 4).2 = 2*5 + 2*4	Cuando multiplicamos un número por una suma de dos números, obtenemos el mismo resultado si multiplicamos el número por cada uno de los términos y luego sumamos los resultados.

3. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Uso de la Propiedad Distributiva | Ejemplo 01

(a) $2(x+3) = 2\cdot x + 2\cdot 3$ Propiedad Distributiva

$= 2x + 6$ Simplifique

(b) $\overbrace{(a+b)}(x+y) = (a+b)x + (a+b)y$ Propiedad Distributiva

$= (ax+bx) + (ay+by)$ Propiedad Distributiva

$= ax + bx + ay + by$ Propiedad Asociativa de la Adición

En el último paso eliminamos el paréntesis porque, de acuerdo con la Propiedad Asociativa, no importa el orden de la adición.

4. ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

El número 0 es especial para la adición; recibe el nombre de **identidad aditiva** porque a + 0 = a para cualquier número real a. Todo número real a tiene un negativo, -a, que satisface a + (-a) = 0. La **sustracción** es la operación que deshace a la adición; para sustraer un número de otro, simplemente sumamos el negativo de ese número. Por definición

$$a - b = a + (-b)$$

Para combinar números reales con números negativos, usamos las siguientes propiedades.

Propiedad	Ejemplo
1. $(-1)a = -a$	$(-1)5 = -5$
2. $-(-a) = a$	$-(-5) = 5$
3. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$	$(-5)7 = 5(-7) = -(5 \cdot 7)$
4. $(-a)(-b) = ab$	$(-4)(-3) = 4 \cdot 3$
5. $-(a + b) = -a - b$	$-(3 + 5) = -3 - 5$
6. $-(a - b) = b - a$	$-(5 - 8) = 8 - 5$

NOTA 03
No suponga que –a es un número negativo. Que –a sea negativo o positivo depende del valor de a. Por ejemplo, si a = 5, entonces -a = -5, un número negativo, pero si a = -5, entonces -a = -(-5) = 5 (Propiedad 2), un número positivo.

Adición y sustracción

La Propiedad 6 expresa el hecho intuitivo de que a - b y b - a son negativos entre sí.

La Propiedad 5 se usa a veces con más de dos términos:

$-(a + b + c) = -a - b - c$

Uso de las propiedades negativos | Ejemplo 02

Sea x, y y z números reales.

(a) $-(x + 2) = -x - 2$ — Propiedad 5: $-(a + b) = -a - b$

(b) $-(x + y - z) = -x - y - (-z)$ — Propiedad 5: $-(a + b) = -a - b$

$= -x - y + z$ — Propiedad 2: $-(-a) = a$

5. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

El número 1 es especial para la multiplicación; recibe el nombre de identidad multiplicativa porque a 1 a para cualquier número real a. Todo número real a diferente de cero tiene un recíproco, 1/a, que satisface a (1/a) 1. La división es la operación que deshace la multiplicación; para dividir entre un número, multiplicamos por el recíproco de ese número. Si b 0, entonces, por definición,

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Escribimos a (1/b) simplemente como a/b. Nos referimos a a/b como el cociente entre a y b o como la fracción de a sobre b; a es el numerador y b es el denominador (o divisor). Para combinar números reales usando la operación de división, usamos las siguientes propiedades

Multiplicación y división

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{10}{21}$	Para **multiplicar fracciones**, multiplique numeradores y denominadores.
2. $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$	$\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{14}{15}$	Para **dividir fracciones**, multiplique por el recíproco del divisor.
3. $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$	$\frac{2}{5}+\frac{7}{5}=\frac{2+7}{5}=\frac{9}{5}$	Para **sumar fracciones** con el mismo denominador, **sume los numeradores**.
4. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{2\cdot 7+3\cdot 5}{35}=\frac{29}{35}$	Para **sumar fracciones** con **denominadores diferentes**, encuentre un común denominador y a continuación sume los numeradores.
5. $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$	$\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{2}{3}$	**Cancele** números que sean **factores comunes** en numerador y denominador.

Multiplicación y división

6. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$ $\quad \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, así que $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$ **Multiplicación cruzada**.

Para sumar fracciones con denominadores diferentes, por lo general no usamos la Propiedad 4. En cambio, reescribimos las fracciones de modo que tengan el mínimo denominador común que sea posible (a veces menor que el producto de los denominadores), y luego usamos la Propiedad 3. Este denominador es el Mínimo Común Denominador (MCD) que se describe en el ejemplo siguiente.

Uso del MCD para sumar fracciones | Ejemplo 03

Evalúe: $\frac{5}{36} + \frac{7}{120}$

SOLUCIÓN La factorización de cada denominador en factores primos dará

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad \text{y} \qquad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Multiplicación y división

Encontramos el mínimo común denominador (MCD) al formar el producto de todos los factores presentes en estas factorizaciones, usando la máxima potencia de cada factor.

Uso del MCD para sumar fracciones | Ejemplo 3

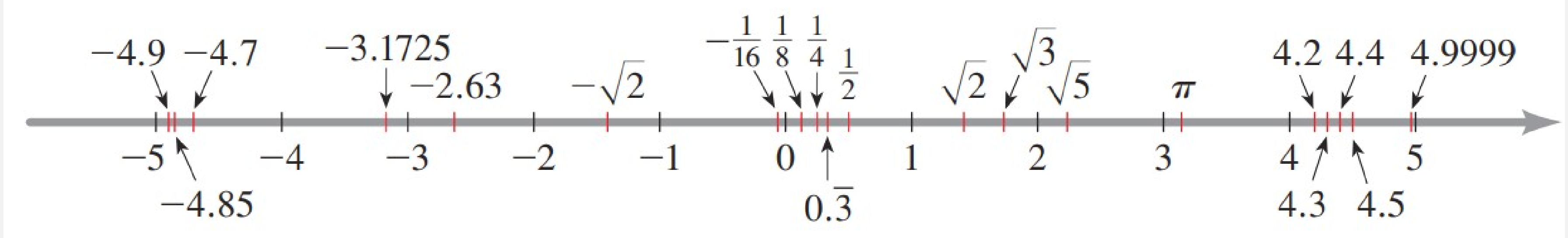
Entonces el MCD es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Entonces,

$$\frac{5}{36} + \frac{7}{120} = \frac{5 \cdot 10}{36 \cdot 10} + \frac{7 \cdot 3}{120 \cdot 3}$$ Use común denominador

$$= \frac{50}{360} + \frac{21}{360} = \frac{71}{360}$$ Propiedad 3: Suma de fracciones con el mismo denominador

6. LA RECTA REAL

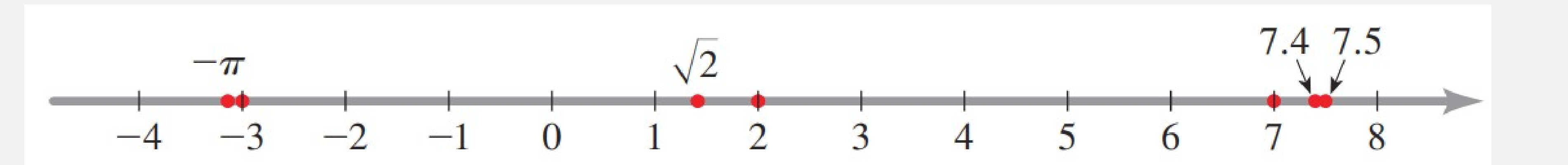
Los números reales pueden ser representados por puntos sobre una recta, como se muestra en la Figura 3. La dirección positiva (hacia la derecha) está indicada por una flecha. Escogemos un punto de referencia arbitrario O, llamado el origen, que corresponde al número real 0. Dada cualquier unidad de medida conveniente, cada número positivo x está representado por el punto sobre la recta a una distancia de x unidades a la derecha del origen, y cada número negativo –x está representado por el punto a x unidades a la izquierda del origen. El número asociado con el punto P se llama coordenada de P y la recta se llama recta coordenada, o recta de los números reales, o simplemente recta real. A veces identificamos el punto con su coordenada y



La recta real.

Los números reales son ordenados. Decimos que a es menor que b y escribimos a b si b a es un número positivo. Geométricamente, esto significa que a está a la izquierda de b en la recta numérica, o bien, lo que es lo mismo, podemos decir que b es mayor que a y escribimos b a. El símbolo a ≤ b (o b ≥ a) quiere decir que a b o que a b y se lee “a es menor o igual a b”. Por ejemplo, las siguientes son desigualdades verdaderas (vea Figura 4):

$$7 < 7.4 < 7.5 \qquad -\pi < -3 \qquad \sqrt{2} < 2 \qquad 2 \leq 2$$



7. CONJUNTOS E INTERVALOS

Un **conjunto** es una colección de objetos, y estos objetos se llaman **elementos** del conjunto.
Si S es un conjunto, la notación $a \in S$ significa que a es un elemento de S, y $b \notin S$ quiere decir que b no es un elemento de S. Por ejemplo, si Z representa el conjunto de enteros, entonces $3 \in Z$ pero $\pi \notin Z$.
Algunos conjuntos pueden describirse si se colocan sus elementos dentro de llaves. Por ejemplo, el conjunto A que está formado por todos los enteros positivos menores que 7 se puede escribir como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

También podríamos escribir A **en notación constructiva de conjuntos** como

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero y } 0 < x < 7\}$$

que se lee "A es el conjunto de todas las x tales que x es un entero y $0 < x < 7$".
Si S y T son conjuntos, entonces su unión $S \cup T$ es el conjunto formado por todos los
elementos que están en S o T (o en ambos). La intersección de S y T es el conjunto $S \cap T$

Conjuntos e intervalos

Formado por todos los elementos que están en S y T. En otras palabras, $S \cap T$ es la parte común de S y T. El **conjunto vacío**, denotado por $\varnothing$, es el conjunto que no contiene elementos.

Unión e intersección de conjuntos | Ejemplo 4

Si $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{4, 5, 6, 7\}$, y $V = \{6, 7, 8\}$, encuentre los conjuntos $S \cup T$, $S \cap T$ y $S \cap V$.

SOLUCIÓN

T

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

S V

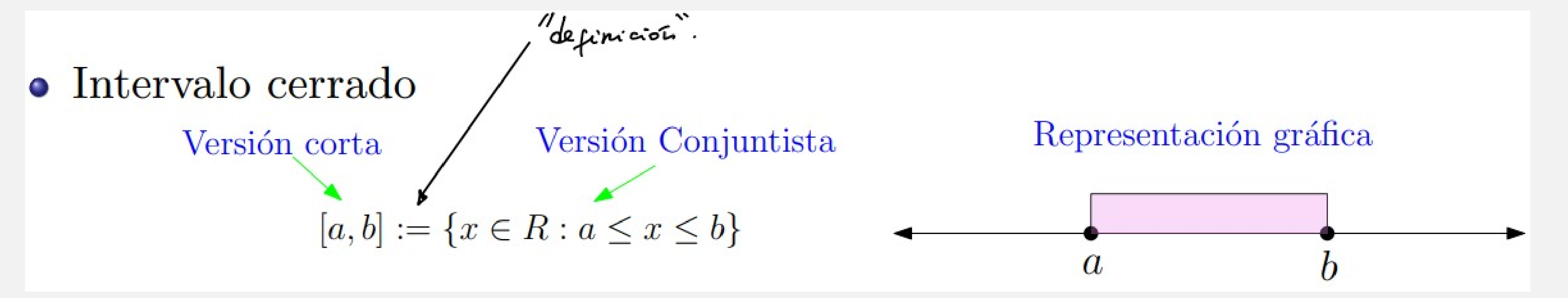
$S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ Todos los elementos en S o T

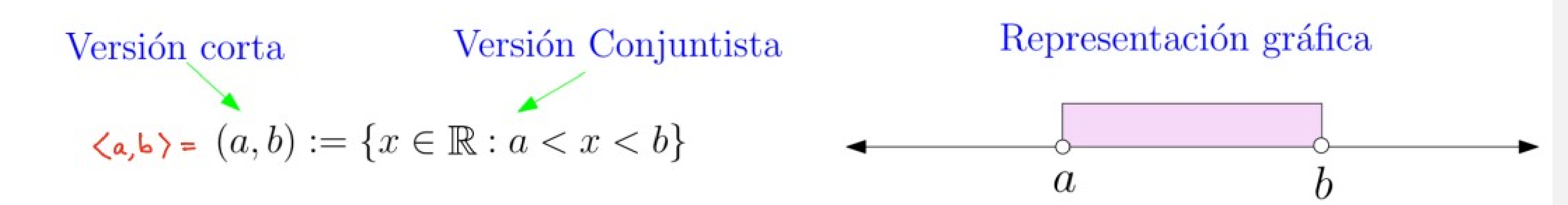
$S \cap T = \{4, 5\}$ Elementos comunes a S y T

$S \cap V = \varnothing$ S y V no tienen elementos en común

Conjuntos e intervalos

Intervalos limitados Consideremos $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $a < b$





Conjuntos e intervalos

Intervalos limitados Consideremos $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $a < b$

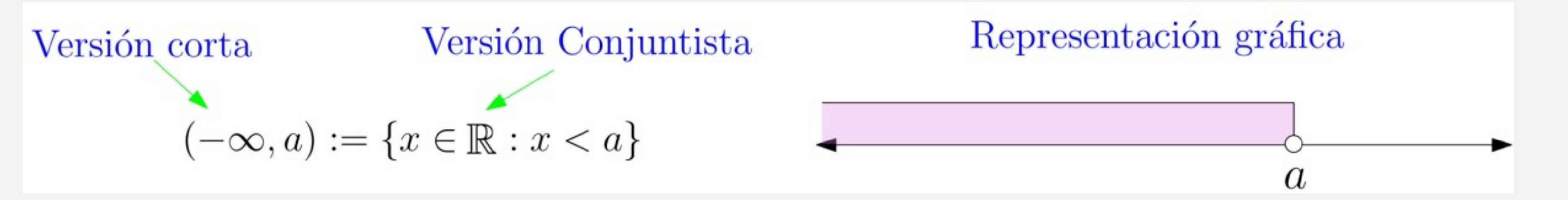




Conjuntos e intervalos

Intervalos no-limitados Consideremos $\in a \mathbb{R}$ . .





NOTA: $(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$. 0

Conjuntos e intervalos

En resumen

Notación	Descripción de conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \le x \le b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \le x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \le b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \le x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \le b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

Conjuntos e intervalos

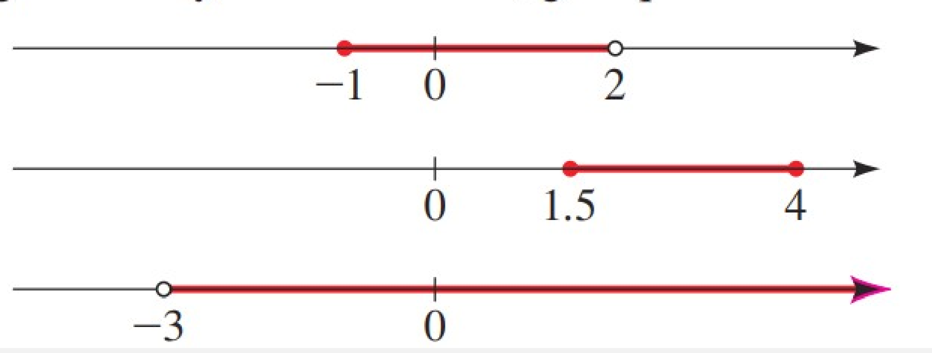
Graficación de intervalos | Ejemplo 5

Exprese cada intervalo en términos de desigualdades y, a continuación, grafique el intervalo.

(a) $[-1, 2) = \{x \mid -1 \leq x < 2\}$

(b) $[1.5, 4] = \{x \mid 1.5 \leq x \leq 4\}$

(c) $(-3, \infty) = \{x \mid -3 < x\}$







Valor absoluto y distancia

El valor absoluto de un número a, denotado por 0 a 0, es la distancia de a a 0 en la recta de números reales (vea Figura 9). La distancia es siempre positiva o cero, de modo que tenemos 0 a 0 ≥ 0 para todo número a. Recordando que a es positivo cuando a es negativo, tenemos la siguiente

DEFINICIÓN DE VALOR ABSOLUTO

Si a es un número real, entonces el **valor absoluto** de a es

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Evaluación de valores absolutos de números | Ejemplo 07

(a) $|3| = 3$

(b) $|-3| = -(-3) = 3$

(c) $|0| = 0$

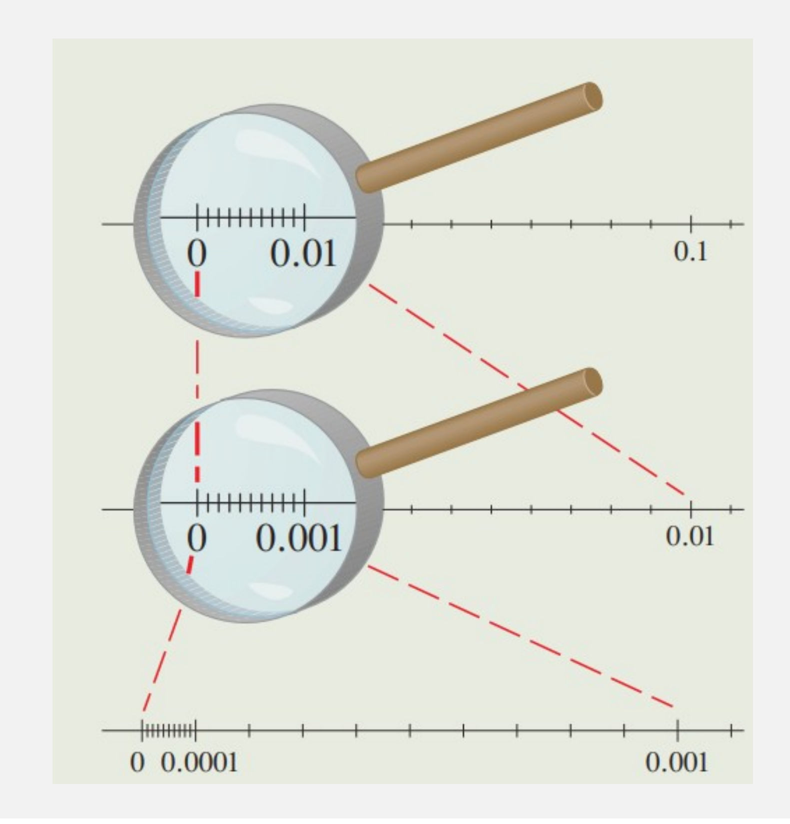
(d) $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3 \quad (\text{porque } 3 < \pi \Rightarrow 3 - \pi < 0)$

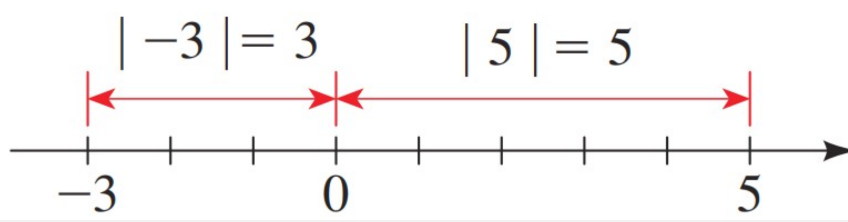
Conjuntos e intervalos

NOTA 03

No hay número mínimo ni número máximo en un intervalo abierto

Cualquier intervalo contiene un número infinito de números; cualquier punto en la gráfica de un intervalo corresponde a un número real. En el intervalo cerrado 30, 14 , el número mínimo es 0 y el máximo es 1, pero el intervalo abierto (0, 1) no contiene número mínimo o máximo. Para ver esto, observe que 0.01 es cercano a cero, pero 0.001 más cercano, 0.0001 es todavía más cercano, y así sucesivamente. Siempre podemos hallar un número en el intervalo (0, 1) más cercano a cero que cualquier número dado. Como 0 no está en el intervalo, el intervalo no contiene un número mínimo. Del mismo modo, 0.99 es cercano a 1, pero 0.999 es más cercano y 0.9999 es todavía más cercano, y así sucesivamente. Como 1 no está en el intervalo, el intervalo no





Conjuntos e intervalos

Cuando trabajamos con valores absolutos, utilizamos las propiedades siguientes:

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

1. $\lvert a \rvert \geq 0$	$\lvert -3 \rvert = 3 \geq 0$	El valor absoluto de un número siempre es positivo o cero.
2. $\lvert a \rvert = \lvert -a \rvert$	$\lvert 5 \rvert = \lvert -5 \rvert$	Un número y su negativo tienen el mismo valor absoluto.
3. $\lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \lvert b \rvert$	$\lvert -2 \cdot 5 \rvert = \lvert -2 \rvert \lvert 5 \rvert$	El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.
4. $\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert}$	$\left\lvert \frac{12}{-3} \right\rvert = \frac{\lvert 12 \rvert}{\lvert -3 \rvert}$	El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos.

Conjuntos e intervalos

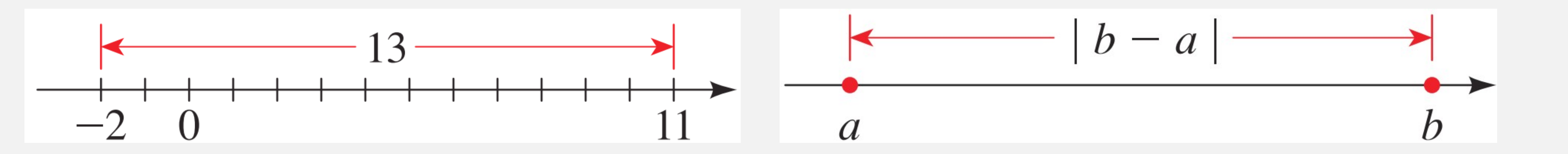
Cuando trabajamos con valores absolutos, utilizamos las propiedades siguientes:

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

1. $\lvert a \rvert \geq 0$	$\lvert -3 \rvert = 3 \geq 0$	El valor absoluto de un número siempre es positivo o cero.
2. $\lvert a \rvert = \lvert -a \rvert$	$\lvert 5 \rvert = \lvert -5 \rvert$	Un número y su negativo tienen el mismo valor absoluto.
3. $\lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \lvert b \rvert$	$\lvert -2 \cdot 5 \rvert = \lvert -2 \rvert \lvert 5 \rvert$	El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.
4. $\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert}$	$\left\lvert \frac{12}{-3} \right\rvert = \frac{\lvert 12 \rvert}{\lvert -3 \rvert}$	El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos.

Conjuntos e intervalos

¿Cuál es la distancia sobre la recta real entre los números −2 y 11? De la Figura 10 vemos que la distancia es 13. Llegamos a esto si encontramos ya sea $|11 - (-2)| = 13$ o $|(-2) - 11| = 13$. De esta observación hacemos la siguiente definición (vea Figura 11).



DISTANCIA ENTRE PUNTOS SOBRE LA RECTA REAL

Si a y b son números reales, entonces la **distancia** entre los puntos a y b sobre la recta real es

$$d(a, b) = |b - a|$$

Conjuntos e intervalos

De la Propiedad 6 de negativos se deduce que

$$|b - a| = |a - b|$$

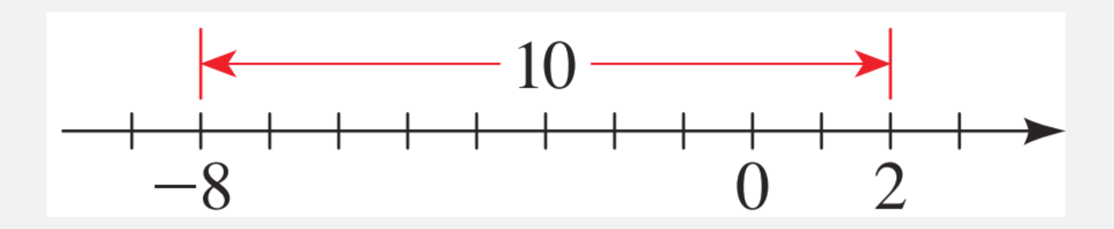
Esto confirma que, como es de esperarse, la distancia de a a b es la misma distancia de b a a.

Distancia entre puntos en la recta real | Ejemplo 08

La distancia entre los números -8 y 2 es

$$d(a, b) = |-8 - 2| = |-10| = 10$$

Comprobación Gráfica:



8. AXIOMAS

Axiomas de la Adición

Para cada par de números $a, b \in U$. Definamos un nuevo número en U denominado **la suma de a y b** denotado por

$$a + b$$

A1 Si para cualquier $a, b \in U$ se cumple:

$$a + b = b + a$$

ax. de conmutatividad.
Ejm. $U = \{4, 5\}$

Decimos que U satisface la ley conmutativa de la adición.

A2 Si para cualquier $a, b, c \in U$ se cumple

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

ax. asociativo
Ejm. $U = \{x : x \text{ es par}\}$

Decimos que U satisface la ley asociativa de la adición.

A3 si existe un único elemento denotado (simbolizado) por $0 \in U$ (denominado nulo), tal que para cualquier número $a \in U$, se cumple

$$a + 0 = a.$$

Ejm. $U = \{1, 0\}$
$1 + 0 = 1$
$0 + 0 = 0$

Decimos que U tiene elemento nulo aditivo.

A4 Si para cualquier número $a \in U$ existe un número denotado por $-a \in U$ y llamado opuesto de a tal que

$$a + (-a) = 0$$

$U = \{-1, 0, 1\}$
$-1 + 0 = -1$
$1 + 0 = 1$
$0 + 0 = 0$
A1 ✓
A2 ✓
A3 ✓
A4 ✓
$1 + (-1) = 0$
$-1 + (1) = 0$
$0 + 0 = 0$

Decimos que U tiene elemento inverso aditivo.

Axiomas de la Multiplicación

Para cada par de números reales $a, b \in U$. Definamos un nuevo número en U denominado **la multiplicación de a y b** denotado por:

$$a.b$$

M1 Si para cualquier $a, b \in U$ se cumple:

$$a.b = b.a$$

Decimos que U satisface la ley conmutativa de la multiplicación.

M2 Si para cualquier $a, b, c \in U$ se cumple

$$a.(b.c) = (a.b).c$$

Decimos que U satisface la ley asociativa de la multiplicación.

M3 Si existe un único elemento denotado por $1 \in U$ (denominado unidad), tal que para cualquier número $a \in U$, se cumple

$$a.1 = a.$$

Decimos que U tiene elemento neutro multiplicativo.

M4 Si para cualquier número $a \neq 0$ en U existe un número denotado por $\frac{1}{a} \in U$ (llamado elemento inverso de a) tal que

$$a.\frac{1}{a} = 1.$$

Decimos que U tiene elemento inverso multiplicativo.

$U = \{-1, 0, 1\}$ M_1 ✓ M_2 ✓

$-1.(1) = -1$
$0.1 = 0$
$1.(1) = 1$
M_3 ✓ M_4 ✓.

a) $(-1) \times (-1) = 1$ | b) $1 \times (1) = 1$

... Cuando $U = \mathbb{Q}$ es el mejor conj. que satisface los axiomas.

Axiomas de la distribución y del Orden

Axioma de la distribución:

Para cualquier $a, b, c \in U$:

$$a.(c + d) = a.c + a.d$$

Decimos que U satisface la ley distributiva.

Axioma del orden:

O1 Si para cada $a \in U$, tenemos

$$a < 0, \qquad \text{o solo} \qquad a = 0 \qquad \text{o solo} \qquad a > 0;$$

Decimos que U es ordenable. → $U = \mathbb{N}$. es ordenable.

O2 Si para cada $a, b \in U$ y $a, b > 0$, tenemos

$$a + b > 0;$$

Decimos que la adición en U es ordenable.

O3 Si para cada $a, b \in U$ y $a, b > 0$, tenemos

$$a \cdot b > 0;$$

Decimos que la multiplicación en U es ordenable.

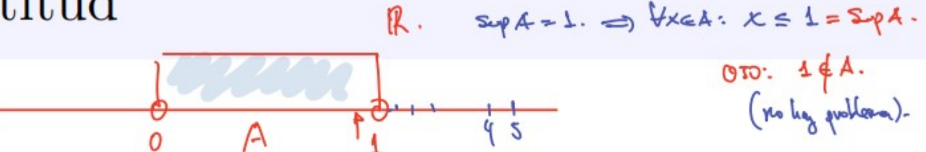
Ejm. En $\mathbb{Z}$:

$7 > 0$, $x > 0$:

·) $7 + x > 0$ ... ax. O_2.

·) $7 . x > 0$ ... ax. O_3.

Axioma de completitud



Definición

Sea $A \subset U$. A es un conjunto limitado si existe $a \in U$ tal que:

$$x \leq a, \quad \text{para cualquier } x \in A.$$

El elemento $a \in U$ se llama cota superior.

∀x∈A: x ≤ 5
∀x∈A: x ≤ 2.8

A = {0, 1/2, 1, 2} ⊂ 

sup A = "menor de las cotas superiores"

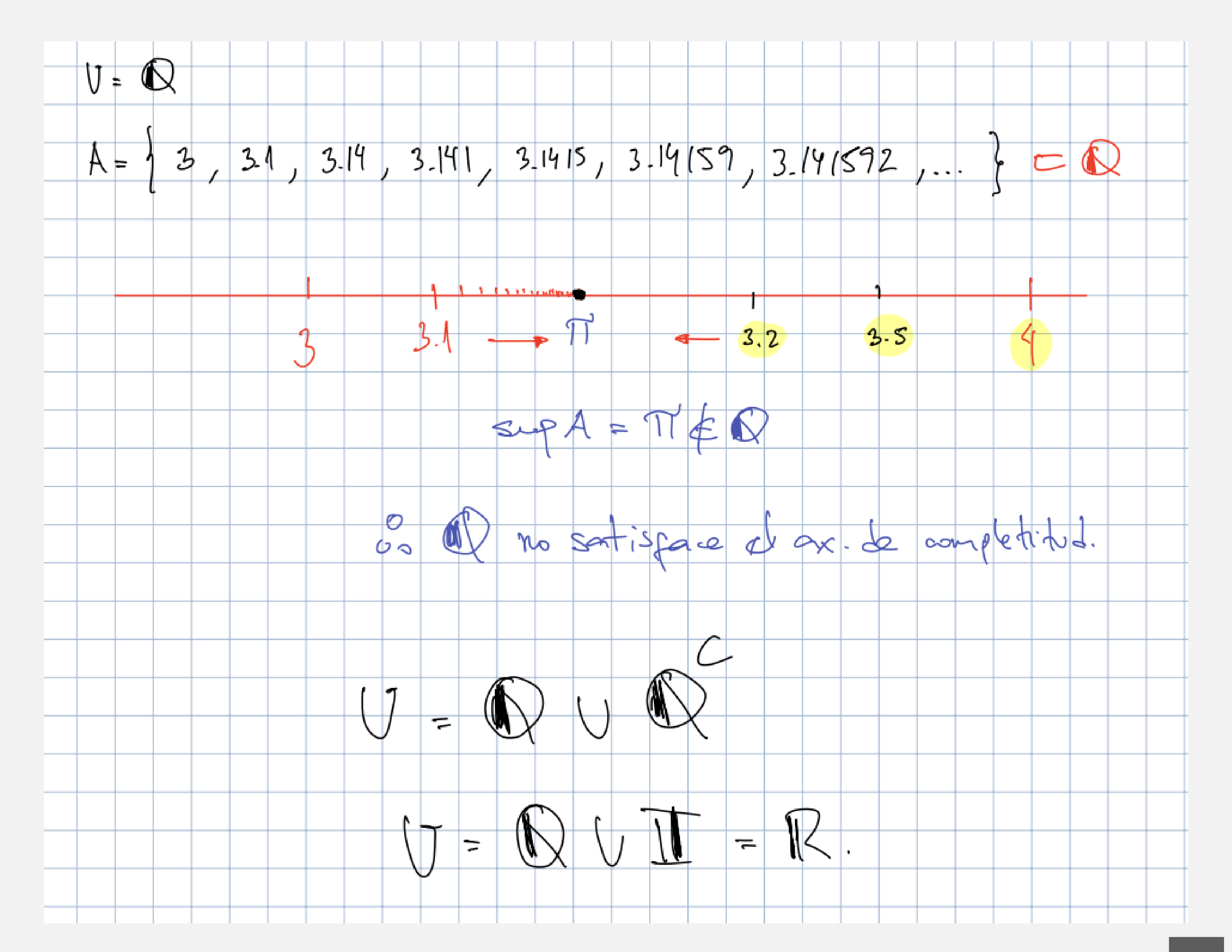
Definición

En este caso: sup A = 2 ∈ A (particularmente)
0 ≤ 2, 1/2 ≤ 2, 1 ≤ 2, 2 ≤ 2 ✓.

Si para $A \subset U$ existe la menor cota superior en U, esta menor cota superior se llama supremo de A.

Axioma de completitud

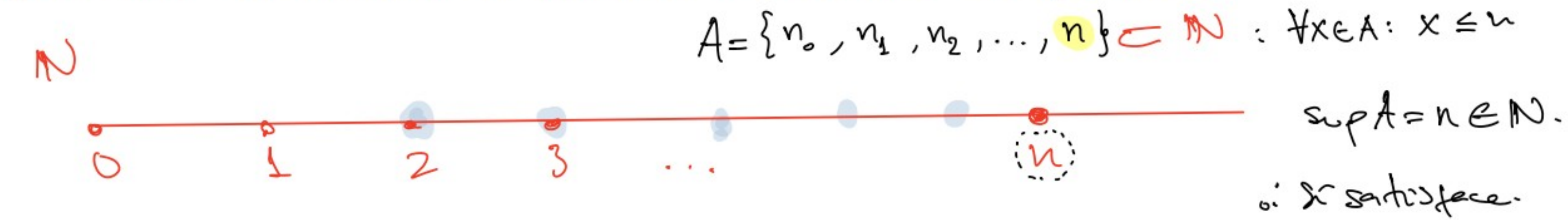
Decimos que U satisface el axioma de completitud si para cualquier subconjunto $A \subset U$ limitado tenemos que A tiene supremo en U.



U = Q
A = { 3 , 3.1 , 3.14 , 3.141 , 3.1415 , 3.14159 , 3.141592 , ... } ⊂ Q
3
3.1
π
3.2
3.5
4
sup A = π ∉ Q
∴ Q no satisface el ax. de completitud.
U = Q ∪ Q^c
U = Q ∪ I = R.

RESPONDA

- ¿Los números naturales $\mathbb{N}$ satisface el axioma de completitud?



- ¿Los números enteros $\mathbb{Z}$ satisface el axioma de completitud? ∀x∈A: x ≤ n



- ¿Los números racionales $\mathbb{Q}$ satisface el axioma de completitud?

No. Porque $A=\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, 3.141592, \ldots\}$

no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.

RESPONDA

- ¿Los números naturales $\mathbb{N}$ satisfacen los axiomas anteriores?

  NO. Porque no satisface el ax. de inv. aditivo.

- ¿Los números enteros $\mathbb{Z}$ satisfacen los axiomas anteriores?

  NO. Porque no satisface el ax. de inv. multiplicativo.

- ¿Los números racionales $\mathbb{Q}$ satisfacen los axiomas anteriores?

  NO. Porque no satisface el ax. de completitud.

- ¿Existen más números que no sean racionales?

  SÍ. Particularmente, supremos de ciertos conjuntos en $\mathbb{Q}$.

- ¿Qué conjunto de números satisface los axiomas anteriores?

  $U = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$.

$\sqrt{2}$ π e NO SON RACIONALES

- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

$\sqrt{2} =$ **1.4142**1356237309504880168872420969807856967187537694807317667973799...

$$
\begin{array}{rclcl}
1.4 < & \sqrt{2} & \Leftrightarrow & (1.4)^2 < 2 \\
1.41 < & \sqrt{2} & \Leftrightarrow & (1.41)^2 < 2 \\
1.414 < & \sqrt{2} & \Leftrightarrow & (1.414)^2 < 2 \\
1.4142 < & \sqrt{2} & \Leftrightarrow & (1.4142)^2 < 2 \\
1.41421 < & \sqrt{2} & \Leftrightarrow & (1.41421)^2 < 2 \\
\vdots < & \sqrt{2} & \Leftrightarrow & \vdots
\end{array}
$$

Sea el siguiente subconjunto de los números racionales

$A = \{x \in \mathbb{Q} : \ x^2 < 2\}$ **¿A tiene supremo?**

$\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}^c$.

Def. $\mathbb{R}$ es el conj. de núm. que sat. los axiomas anteriores. $(\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c)$

Aplicación del Axioma de completitud

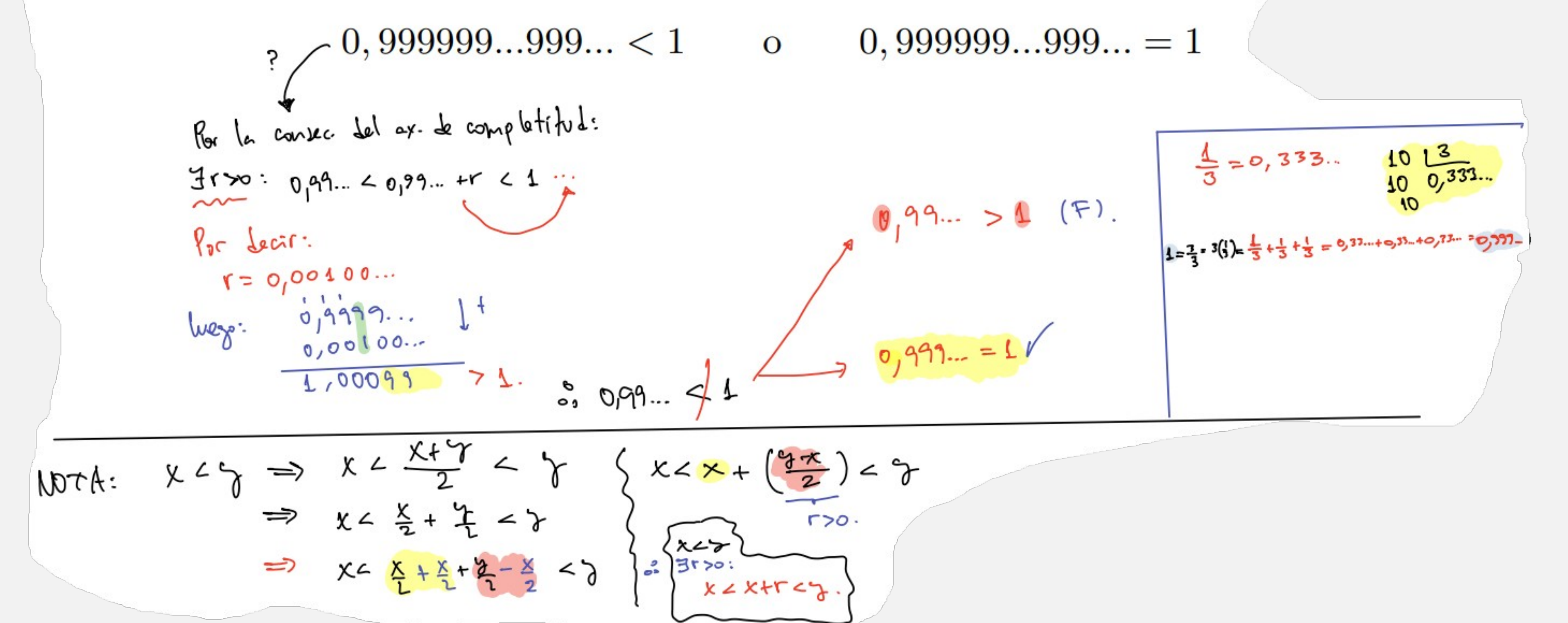
Consecuencia del axioma de completitud:

- Si $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$, entonces existe $r > 0$ número real tal que

$$x < x + r < y.$$

Pregunta de discusión

$$0,999999...999... < 1 \qquad \text{o} \qquad 0,999999...999... = 1$$



Definición de los Números reales

Definición

El conjunto de los números reales es el conjunto de todos los números que cumplen los axiomas:

- *Axiomas de la adición,*
- *Axiomas de la multiplicación,*
- *Axioma de la distribución,*
- *Axiomas del orden,*
- *Axioma de completitud.*

El conjunto de los números reales es denotado por $\mathbb{R}$.

- ¿Que nos dice los axiomas anteriores?

Axiomas de la relación de igualdad en $\mathbb{R}$

1. Axioma de reflexividad: Todo número real es igual a sí mismo.

$$\forall x \in \mathbb{R} : x = x$$

2. Axioma de simetría: Si un número real es igual a otro, entonces este es igual al primero.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x = y \Rightarrow y = x$$

$8 = x$

$x = 8$

3. Axioma de transitividad: Si un número ~~número~~ real. es igual a otro, y este igual a un tercero, entonces el primero y el tercero son el mismo.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$$

* inferencias: $(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

4. Axioma de sustitución: En cualquier proposición concerniente a números reales, todo número real puede ser reemplazado por su igual sin alterar el valor de verdad de la proposición.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x = y \Rightarrow V[P(x)] \equiv V[P(y)]$$

$2^2 + 5 - 3 = 1 \ldots$ (F)

$2 = \sqrt{4}$.

$(\sqrt{4})^2 + 5 - 3 = 1 \ldots$ (F)

5. Axioma de dicotomía: Todo par de números reales son iguales o diferentes.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x = y \vee x \neq y$$

6. Axioma Tricotomía:

$\forall x, y$: $x < y$ o sólo $x = y$ o sólo $x > y$.

O_1: { $x - y < 0$ o sólo $x - y = 0$ o sólo $x - y > 0$

$a < 0$ $\quad a = 0$ $\quad a > 0$

ANEXO

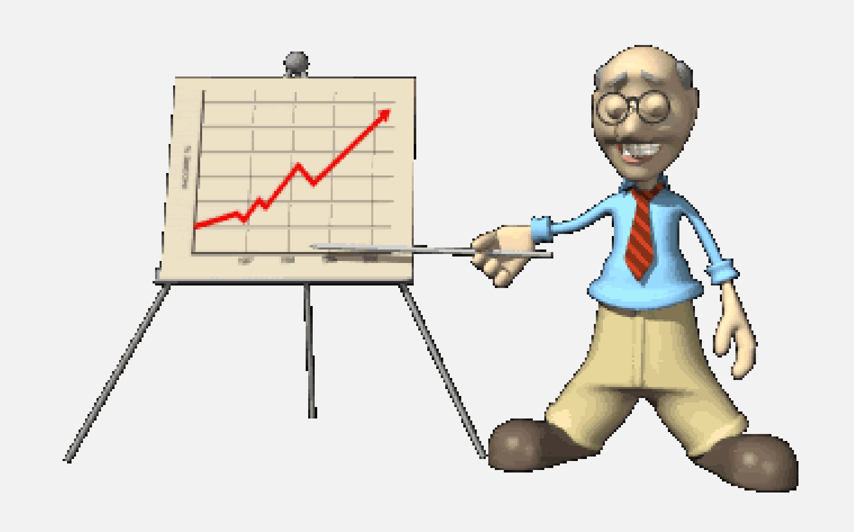
Los números reales permiten el cálculo de valores como fuerzas, velocidades, probabilidad, reactividad, conductividad(térmica o eléctrica), esfuerzo cortante, flujo(magnético, de calor, etc) y todos col cálculos físicos y químicos.

Los Números Reales son parte importante de nuestra vida diaria. Los usamos continuamente y de manera inconsciente, en simples cálculos, en las cuentas de la casa, el banco, el presupuesto, la hora, compras, ventas, etc.



Glosario

- Antecedentes y concepto
- Definición
- Exponentes enteros (negativos y positivos)
- Reglas para trabajar con exponentes
- Notación científica
- Radicales
- Exponentes racionales
- Racionalización del denominador



1. ANTECEDENTES Y CONCEPTO

El concepto básico de los exponentes **se remonta al menos hasta la antigua Grecia, cuando Euclides usó el término "potencia" para indicar el número de veces que un número debía multiplicarse por sí mismo**. Un estudioso del siglo XIV, Nicolás Oresme, escribió números para indicar el uso de potencias en este sentido.

El radical **aparece por primera vez en 1525, cuando Christoff Rudoff, matemático alemán hace uso del símbolo para referirse a la raíz cuadrada en su libro de texto sobre álgebra, titulado "Coss"**.

La potenciación es la multiplicación de un número por sí mismo repetidas veces

El **radical** es el signo con que se indica la operación de extraer raíces

2. DEFINICIÓN

En esta sección damos significado a expresiones como $a^{m/n}$ en las que el exponente m/n es un número racional. Para hacer esto, necesitamos recordar algunos datos acerca de exponentes enteros, radicales y raíces n.

Exponentes enteros (negativos y positivos)

Normalmente, un producto de números idénticos se escribe en notación exponencial. Por ejemplo, 5 * 5 * 5 se escribe como 5^3. En general, tenemos la siguiente definición.

NOTACIÓN EXPONENCIAL

Si a es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces la ***n*-ésima potencia** de a es

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

El número a se denomina **base**, y n se denomina **exponente**.

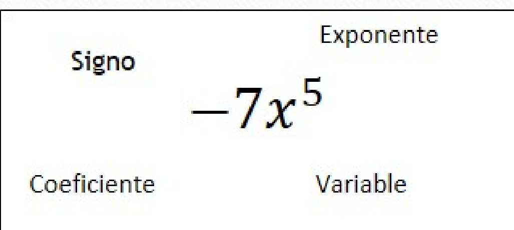
2. DEFINICIÓN

Representación

Se llaman expresiones algebraicas, a aquellas donde aparecen números y letras en un cierto conjunto numérico.



Nivel de grados 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 .... ∞
Determinándose el exponente por una cantidad numérica a un grado por menor a mayor.



3. EXPONENTES ENTEROS (NEGATIVOS Y POSITIVOS)

Notación exponencial | Ejemplo 1

(a) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$

(b) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

(c) $-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$

Observe la distinción entre $(-3)^4$ y -3^4. En $(-3)^4$ el exponente se aplica al -3, pero en -3^4 el exponente se aplica sólo al 3.

Podemos expresar varias reglas útiles para trabajar con notación exponencial. Para descubrir la regla para multiplicación, multiplicamos 5^4 por 5^2:

$$5^4 \cdot 5^2 = \underbrace{(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)}_{\text{4 factores}}\underbrace{(5 \cdot 5)}_{\text{2 factores}} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{6 factores}} = 5^6 = 5^{4+2}$$

Es evidente que *para multiplicar dos potencias de la misma base, sumamos sus exponentes*. En general, para cualquier número real a y cualesquier enteros positivos m y n, tenemos

$$a^m a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{m \text{ factores}}\underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{n \text{ factores}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m + n \text{ factores}} = a^{m+n}$$

Entonces $a^m a^n = a^{m+n}$.

Nos gustaría que esta regla fuera verdadera aun cuando m y n fueran 0 o enteros negativos. Por ejemplo, debemos tener

$$2^0 \cdot 2^3 = 2^{0+3} = 2^3$$

Pero esto puede ocurrir sólo si $2^0 = 1$. Igualmente, deseamos tener

$$5^4 \cdot 5^{-4} = 5^{4+(-4)} = 5^{4-4} = 5^0 = 1$$

y esto será cierto si $5^{-4} = 1/5^4$. Estas observaciones llevan a la siguiente definición.

Ley	Ejemplo	Descripción
1. $a^m a^n = a^{m+n}$	$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$	Para multiplicar dos potencias del mismo número, sume los exponentes.
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$	Para dividir dos potencias del mismo número, reste los exponentes.
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^2)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$	Para elevar una potencia a una nueva potencia, multiplique los exponentes.
4. $(ab)^n = a^n b^n$	$(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$	Para elevar un producto a una potencia, eleve cada uno de los factores a la potencia.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3^2}{4^2}$	Para elevar un cociente a una potencia, eleve el numerador y el denominador a la potencia.

EXPONENTES CERO Y NEGATIVOS

Si $a \neq 0$ es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces

$$a^0 = 1 \qquad \text{y} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exponentes cero y negativos | Ejemplo 2

(a) $\left(\frac{4}{7}\right)^0 = 1$

(c) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

(b) $x^{-1} = \frac{1}{x^1} = \frac{1}{x}$

DEMOSTRACIÓN DE LA LEY 3 | Si m y n son enteros positivos, tenemos:

$$(a^m)^n = (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}})^n$$

$$= \underbrace{(\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}})(\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}}) \cdots (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}})}_{n \text{ grupos de factores}}$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{mn \text{ factores}} = a^{mn}$$

Los casos para los que m ≤ 0 o n ≤ 0 se pueden demostrar usando para ello la definición de exponentes negativos.

DEMOSTRACIÓN DE LA LEY 4 | Si n es un entero positivo, tenemos

Uso de las Leyes de Exponentes | Ejemplo 3

(c) $\dfrac{c^9}{c^5} = c^{9-5} = c^4$ — Ley 2: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(d) $(b^4)^5 = b^{4\cdot 5} = b^{20}$ — Ley 3: $(a^m)^n = a^{mn}$

(e) $(3x)^3 = 3^3x^3 = 27x^3$ — Ley 4: $(ab)^n = a^nb^n$

(f) $\left(\dfrac{x}{2}\right)^5 = \dfrac{x^5}{2^5} = \dfrac{x^5}{32}$ — Ley 5: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

EJEMPLO 4 | Simplificación de expresiones con exponentes

Simplifique

(a) $(2a^3b^2)(3ab^4)^3$ **(b)** $\left(\frac{x}{y}\right)^3\left(\frac{y^2x}{z}\right)^4$

SOLUCIÓN

(a)

$(2a^3b^2)(3ab^4)^3 = (2a^3b^2)[3^3a^3(b^4)^3]$	Ley 4: $(ab)^n = a^nb^n$
$= (2a^3b^2)(27a^3b^{12})$	Ley 3: $(a^m)^n = a^{mn}$
$= (2)(27)a^3a^3b^2b^{12}$	Agrupe factores de la misma base
$= 54a^6b^{14}$	Ley 1: $a^ma^n = a^{m+n}$

(b)

$\left(\frac{x}{y}\right)^3\left(\frac{y^2x}{z}\right)^4 = \frac{x^3}{y^3}\frac{(y^2)^4x^4}{z^4}$	Leyes 5 y 4
$= \frac{x^3}{y^3}\frac{y^8x^4}{z^4}$	Ley 3
$= (x^3x^4)\left(\frac{y^8}{y^3}\right)\frac{1}{z^4}$	Agrupe factores de la misma base
$= \frac{x^7y^5}{z^4}$	Leyes 1 y 2

Cuando simplifique una expresión, encontrará que muchos métodos diferentes llevarán al mismo resultado; siéntase libre de usar cualquiera de las reglas de exponentes para llegar a su propio método. A continuación damos dos leyes adicionales que son útiles en la simplificación de expresiones con exponentes negativos.

LEYES DE EXPONENTES

Ley	Ejemplo	Descripción
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{2}$	Para elevar una fracción a una potencia negativa, invierta la fracción y cambie el signo del exponente.
7. $\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$	$\frac{3^{-2}}{4^{-5}} = \frac{4^5}{3^2}$	Para pasar un número elevado a una potencia del numerador al denominador o del denominador al numerador, cambie el signo del exponente.

DEMOSTRACIÓN DE LA LEY 7 Usando la definición de exponentes negativos y luego la Propiedad 2 de fracciones (página 5), tenemos

$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{1/a^n}{1/b^m} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{b^m}{1} = \frac{b^m}{a^n}$$

■

EJEMPLO 5 | Simplificación de expresiones con exponentes negativos

Elimine exponentes negativos y simplifique cada expresión.

(a) $\frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2}$ **(b)** $\left(\frac{y}{3z^3}\right)^{-2}$

SOLUCIÓN

(a) Usamos la Ley 7, que nos permite pasar un número elevado a una potencia del numerador al denominador (o viceversa) cambiando el signo del exponente.

t^{-4} pasa al denominador y se convierte en t^4

$$\frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2} = \frac{6ss^2}{2t^2t^4} \qquad \text{Ley 7}$$

s^{-2} pasa al numerador y se convierte en s^2

$$= \frac{3s^3}{t^6} \qquad \text{Ley 1}$$

(b) Usamos la Ley 6, que nos permite cambiar el signo del exponente de una fracción al invertir la fracción.

$$\left(\frac{y}{3z^3}\right)^{-2} = \left(\frac{3z^3}{y}\right)^2 \qquad \text{Ley 6}$$

$$= \frac{9z^6}{y^2} \qquad \text{Leyes 5 y 4}$$

LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

Aún cuando no observamos su presencia, las matemáticas permean casi todos los aspectos de la vida en el mundo moderno. Con el advenimiento de la moderna tecnología, las matemáticas desempeñan una función cada vez más grande en nuestras vidas. Hoy en día es probable que alguien sea despertado por un reloj de alarma digital, hizo una llamada telefónica con transmisión digital, envió un mensaje de e-mail en la Internet, manejó un auto con inyección controlada digitalmente, escuchó música en un reproductor de CD o MP3, quizá vio televisión digital o un DVD, luego durmió en una habitación cuya temperatura estaba controlada por un termostato digital. En cada una de estas actividades, las matemáticas intervienen en forma decisiva. En general, una propiedad, como por ejemplo la intensidad o frecuencia del sonido, el nivel de oxígeno en la emisión del escape de un auto, los colores en una imagen, o la temperatura de una habitación, son transformados en sucesiones de números por refi nados algoritmos matemáticos. Estos datos numéricos, que suelen estar formados por muchos millones de bits (los dígitos 0 y 1), son transmitidos y reinterpretados. Trabajar con estas cantidades enormes de datos no fue posible sino hasta la invención de computadoras, máquinas cuyos procesos lógicos fueron inventados por matemáticos. Las aportaciones de las matemáticas en el mundo moderno no están limitadas a avances tecnológicos. Los procesos lógicos de las matemáticas se emplean ahora para analizar complejos problemas en ciencias sociales, políticas y biológicas en formas nuevas y sorprendentes. Los avances en matemáticas continúan y, algunos de los más emocionantes, se dieron tan sólo en la década pasada. En otro libro, llamado Mathematics in the Modern World, describiremos con más detalle el modo en

4. NOTACIÓN CIENTÍFICA

Notación científica

Los científicos usan notación exponencial como una forma compacta de escribir números muy grandes y números muy pequeños. Por ejemplo, la estrella más cercana además del Sol, Proxima Centauri, está aproximadamente a 40,000,000,000,000 de km de distancia. La masa del átomo de hidrógeno es alrededor de 0.00000000000000000000000166 g. Estos números son difíciles de leer y escribir, de modo que los científicos por lo general los expresan en *notación científica*.

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Se dice que un número positivo x está escrito en **notación científica** si está expresado como sigue:

$$x = a \times 10^n \qquad \text{donde } 1 \leq a < 10 \text{ y } n \text{ es un entero}$$

Por ejemplo, cuando decimos que la distancia a la estrella Proxima Centauri es 4×10^{13} km, el exponente positivo 13 indica que el punto decimal debe recorrerse 13 lugares a la *derecha:*

$$4 \times 10^{13} = 40{,}000{,}000{,}000{,}000$$

Mueva el punto decimal 13 lugares a la derecha

Cuando decimos que la masa de un átomo de hidrógeno es 1.66×10^{-24} g, el exponente -24 indica que el punto decimal debe moverse 24 lugares a la *izquierda:*

$$1.66 \times 10^{-24} = 0.00000000000000000000000166$$

Mueva el punto decimal 24 lugares a la izquierda

EJEMPLO 6 | Cambio de notación decimal a científica

En notación científica, escriba cada uno de los números siguientes.

(a) 56,920 **(b)** 0.000093

SOLUCIÓN

(a) $\underbrace{56{,}920}_{\text{4 lugares}} = 5.692 \times 10^4$ **(b)** $\underbrace{0.000093}_{\text{5 lugares}} = 9.3 \times 10^{-5}$

Para usar notación científica en una calculadora, presione la tecla marcada EE o EXP o EEX para ingresar el exponente. Por ejemplo, para ingresar el número 3.629×10^{15} en una calculadora TI-83, ingresamos

3.629 2ND EE 15

y en la pantalla se lee

3.629E15

Con frecuencia se usa notación científica en una calculadora para ver un número muy grande o uno muy pequeño. Por ejemplo, si usamos calculadora para elevar al cuadrado el número 1,111,111, la pantalla puede exhibir (dependiendo del modelo de calculadora) la aproximación

1.234568 12 o 1.23468 E12

Aquí los dígitos finales indican la potencia de 10 e interpretamos el resultado como

$$1.234568 \times 10^{12}$$

EJEMPLO 7 | Cálculo con notación científica

Si $a \approx 0.00046$, $b \approx 1.697 \times 10^{22}$, y $c \approx 2.91 \times 10^{-18}$, use calculadora para aproximar el cociente ab/c.

SOLUCIÓN Podríamos ingresar los datos usando notación científica, o bien, podríamos usar leyes de exponentes como sigue:

$$\frac{ab}{c} \approx \frac{(4.6 \times 10^{-4})(1.697 \times 10^{22})}{2.91 \times 10^{-18}}$$

$$= \frac{(4.6)(1.697)}{2.91} \times 10^{-4+22+18}$$

$$\approx 2.7 \times 10^{36}$$

Expresamos la respuesta redondeada a dos cifras significativas porque el menos preciso de los números dados se expresa a dos cifras significativas.

▼ Radicales

Sabemos lo que 2^n significa siempre que n sea un entero. Para dar significado a una potencia, por ejemplo $2^{4/5}$, cuyo exponente es un número racional, necesitamos estudiar radicales.

El símbolo $\sqrt{}$ significa "la raíz positiva de". Entonces

$$\sqrt{a} = b \quad \text{significa que} \quad b^2 = a \quad \text{y} \quad b \geq 0$$

Como $a = b^2 \geq 0$, el símbolo $\sqrt{a}$ tiene sentido sólo cuando $a \geq 0$. Por ejemplo,

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{porque} \quad 3^2 = 9 \quad \text{y} \quad 3 \geq 0$$

Es cierto que el número 9 tiene dos raíces cuadradas, 3 y -3, pero la notación $\sqrt{9}$ está reservada para la raíz cuadrada *positiva* de 9 (a veces llamada *raíz cuadrada principal* de 9). Si deseamos tener la raíz negativa, debemos escribir $-\sqrt{9}$, que es -3.

Las raíces cuadradas son casos especiales de las raíces n. La raíz n de x es el número que, cuando se eleva a la n potencia, dará x.

DEFINICIÓN DE UNA RAÍZ *n*

Si n es cualquier entero positivo, entonces la **raíz *n* principal** de a se define como sigue:

$$\sqrt[n]{a} = b \qquad \text{significa que} \quad b^n = a$$

Si n es par, debemos tener $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Por lo tanto,

$$\sqrt[4]{81} = 3 \qquad \text{porque} \qquad 3^4 = 81 \qquad \text{y} \qquad 3 \geq 0$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \qquad \text{porque} \qquad (-2)^3 = -8$$

Pero $\sqrt{-8}$, $\sqrt[4]{-8}$ y $\sqrt[6]{-8}$ no están definidas. (Por ejemplo, $\sqrt{-8}$ no está definida porque el cuadrado de todo número real es no negativo.)

Nótese que

$$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4 \qquad \text{pero} \qquad \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = |-4|$$

Entonces la ecuación $\sqrt{a^2} = a$ no siempre es verdadera; lo es sólo cuando $a \geq 0$. No obstante, siempre podemos escribir $\sqrt{a^2} = |a|$. Esta última ecuación es verdadera no sólo para raíces cuadradas, sino para cualquier raíz par. Ésta y otras reglas empleadas para trabajar con raíces n se citan en el recuadro siguiente. En cada propiedad suponemos que existen todas las raíces dadas.

PROPIEDADES DE RAÍCES *n*

Propiedad	Ejemplo
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8}\sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \dfrac{2}{3}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
4. $\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5, \quad \sqrt[5]{2^5} = 2$
5. $\sqrt[n]{a^n} = \|a\|$ si n es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} = \|-3\| = 3$

EJEMPLO 8 | Simplificación de expresiones con raíces n

(a) $\sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{x^3x}$ — Factorice el cubo más grande

$= \sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{x}$ — Propiedad 1: $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$

$= x\sqrt[3]{x}$ — Propiedad 4: $\sqrt[3]{a^3} = a$

(b) $\sqrt[4]{81x^8y^4} = \sqrt[4]{81}\sqrt[4]{x^8}\sqrt[4]{y^4}$ — Propiedad 1: $\sqrt[4]{abc} = \sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}\sqrt[4]{c}$

$= 3\sqrt[4]{(x^2)^4}|y|$ — Propiedad 5: $\sqrt[4]{a^4} = |a|$

$= 3x^2|y|$ — Propiedad 5: $\sqrt[4]{a^4} = |a|$, $|x^2| = x^2$

Con frecuencia es útil combinar radicales semejantes en una expresión, por ejemplo $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$. Esto se puede hacer usando la Propiedad Distributiva. Así,

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2 + 5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

El siguiente ejemplo ilustra más aún este proceso.

EJEMPLO 9 | Combinación de radicales

(a) $\sqrt{32} + \sqrt{200} = \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{100 \cdot 2}$ — Factorice los cuadrados más grandes

$= \sqrt{16}\sqrt{2} + \sqrt{100}\sqrt{2}$ — Propiedad 1: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$= 4\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$ — Propiedad Distributiva

(b) Si $b > 0$, entonces

$\sqrt{25b} - \sqrt{b^3} = \sqrt{25}\sqrt{b} - \sqrt{b^2}\sqrt{b}$ — Propiedad 1: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$= 5\sqrt{b} - b\sqrt{b}$ — Propiedad 5, $b > 0$

$= (5 - b)\sqrt{b}$ — Propiedad Distributiva

Evite el siguiente error:

$$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Por ejemplo, si hacemos $a = 9$ y $b = 16$, entonces vemos el error:

$$\sqrt{9 + 16} \stackrel{?}{=} \sqrt{9} + \sqrt{16}$$
$$\sqrt{25} \stackrel{?}{=} 3 + 4$$
$$5 \stackrel{?}{=} 7 \quad \text{Error!}$$

Exponentes racionales

Para definir lo que significa *exponente racional*, o bien, lo que es lo mismo, un *exponente fraccionario*, como por ejemplo $a^{1/3}$, necesitamos usar radicales. Para dar significado al símbolo $a^{1/n}$ de forma que sea consistente con las Leyes de Exponentes, tendríamos que tener

$$(a^{1/n})^n = a^{(1/n)n} = a^1 = a$$

Entonces, por la definición de la raíz n,

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

En general, definimos exponentes racionales como sigue:

DEFINICIÓN DE EXPONENTES RACIONALES

Para cualquier exponente racional m/n en sus términos más elementales, donde m y n son enteros y $n > 0$, definimos

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m \quad \text{o lo que es equivalente} \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si n es par, entonces requerimos que $a \geq 0$.

Con esta definición se puede demostrar que *las Leyes de Exponentes también se cumplen para exponentes racionales.*

EJEMPLO 10 | Uso de la definición de exponentes racionales

(a) $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$

(b) $8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ Solución alternativa: $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

(c) $125^{-1/3} = \dfrac{1}{125^{1/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{125}} = \dfrac{1}{5}$ **(d)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \dfrac{1}{x^{4/3}} = x^{-4/3}$

EJEMPLO 11 | Uso de las leyes de exponentes con exponentes racionales

(a) $a^{1/3}a^{7/3} = a^{8/3}$ Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$

(b) $\dfrac{a^{2/5}a^{7/5}}{a^{3/5}} = a^{2/5+7/5-3/5} = a^{6/5}$ Ley 1, Ley 2: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(c) $(2a^3b^4)^{3/2} = 2^{3/2}(a^3)^{3/2}(b^4)^{3/2}$ Ley 4: $(abc)^n = a^n b^n c^n$

$= (\sqrt{2})^3 a^{3(3/2)} b^{4(3/2)}$ Ley 3: $(a^m)^n = a^{mn}$

$= 2\sqrt{2}a^{9/2}b^6$

(d) $\left(\dfrac{2x^{3/4}}{y^{1/3}}\right)^3\left(\dfrac{y^4}{x^{-1/2}}\right) = \dfrac{2^3(x^{3/4})^3}{(y^{1/3})^3}\cdot(y^4x^{1/2})$ Leyes 5, 4 y 7

$= \dfrac{8x^{9/4}}{y}\cdot y^4x^{1/2}$ Ley 3

$= 8x^{11/4}y^3$ Leyes 1 y 2

DIOFANTO Vivió en Alejandría hacia el año 250 d.C. Su libro *Arithmetica* es considerado el primer libro de álgebra donde da métodos para hallar soluciones enteras de ecuaciones algebraicas. *Arithmetica* fue leído y estudiado durante más de mil años. Fermat (vea página 99) hizo algunos de sus más importantes descubrimientos cuando estudiaba este libro. La mayor aportación de Diofanto es el uso de símbolos para representar las incógnitas en un problema. Aun cuando su simbolismo no es tan sencillo como el que usamos ahora, fue un avance considerable para escribir todo en palabras. En la notación de Diofanto, la ecuación

$$x^5 - 7x^2 + 8x - 5 = 24$$

se escribe

$$\Delta K^{\gamma} \alpha \varsigma \eta \pitchfork \Delta^{\gamma} \zeta \overset{\circ}{M} \varepsilon \iota^{\sigma} \kappa \delta$$

Nuestra moderna notación algebraica no entró en uso común sino hasta el siglo XVII.

EJEMPLO 12 | Simplificación al escribir radicales como exponentes racionales

(a) $(2\sqrt{x})(3\sqrt[3]{x}) = (2x^{1/2})(3x^{1/3})$ Definición de exponentes racionales

$= 6x^{1/2+1/3} = 6x^{5/6}$ Ley 1

(b) $\sqrt{x\sqrt{x}} = (xx^{1/2})^{1/2}$ Definición de exponentes racionales

$= (x^{3/2})^{1/2}$ Ley 1

$= x^{3/4}$ Ley 3

Racionalización del denominador

A veces es útil eliminar el radical en un denominador al multiplicar el numerador y el denominador por una expresión apropiada. Este procedimiento se denomina **racionalización del denominador.** Si el denominador es de la forma $\sqrt{a}$, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{a}$. Al hacer esto multiplicamos por 1 la cantidad dada, de modo que no cambiamos su valor. Por ejemplo,

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Nótese que el denominador de la última fracción no contiene radical. En general, si el denominador es de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$, entonces multiplicar el numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ racionalizará el denominador, porque (para $a > 0$)

$$\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^{m+n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

EJEMPLO 13 | Racionalización de denominadores

Esto es igual a 1

(a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$

(c) $\sqrt[7]{\dfrac{1}{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}} \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^5}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^7}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{a}$

TABLA DE EXPONENTES	RADICALES
1. a^n = a. a. a……a $\qquad a^1 = a$	10. $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$
2. $a^m \, . \, a^n \, . \, a^p = a^{m+n+p}$	11. $\sqrt[m]{a^p} = (\sqrt[m]{a})^p$
3. $a^0 = 1 \qquad a \neq 0$	12. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \, . \, \sqrt[n]{a}$
4. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	13. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
5. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	15. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$
6. $(a.b)^n = a^n \, . \, b^n$	16. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	17. $\sqrt[n]{a \, . \sqrt[m]{b}} = \sqrt[n]{a} \, . \sqrt[n.m]{b}$
8. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	
9. $(a^m)^n = a^{m.n} = a^{n.m} = (a^n)^m$	
$Nota: \{[(a^n)^m]^p\}^q \qquad a^{n^{m^{p^q}}}$	

PRÁCTICA 01
INTERVALOS Y PRINCIPALES AXIOMAS

I. Intervalos

1. Sean los intervalos: $A=\langle 6,12\rangle$, $B=\langle 7,16]$, $C=[16,+\infty\rangle$. Hallar $(A\cap B)'-C'$.

2. Si $A=\langle -7,-3]$, $B=\langle -3,4\rangle$ y $C=\{x\in\mathbf{R} \mid x>4\}$. Hallar: $C'-(A\cup B)'$.

3. Si $A=\{x\in\mathbf{R} \mid x\in\langle -5,5\rangle \wedge x\in[0,8]\}$, $B=\{x\in\mathbf{R} \mid x\in[-4,6] \vee x\in[4,10]\}$, $C=\{x\in\mathbf{R} \mid x\in[-5,2] \rightarrow x\in[0,8]\}$. Hallar: $(A\cap B)\Delta C$.

4. Sean los intervalos: $A=[-2,5]$, $B=\langle 1,3]$ y $C=\langle -3,5]$. Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

   a) $A'\subset B'$ b) $(A-B)'\cap C' = \phi$ c) $A-B = C-[B\cup(C-A)]$

5. Si se dan los conjuntos en $\mathbf{R}$: $A=\langle -3,8\rangle-\{1\}$, $B=\langle -\infty,3]$ y $C=[6,+\infty\rangle$. Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

   a) $(A\cup B)\subset\langle -\infty,7]$ c) $(A\cap C)\cup B = \langle 6,8\rangle \cup \langle -\infty,-3\rangle$

   b) $(C-A) = [8,+\infty\rangle$ d) $A' = \langle -\infty,-3]\cup[8,+\infty\rangle$

6. Sean: $A=\mathbf{N}\cap(\langle 5,8]\cup[20,36])$, $B=\mathbf{N}\cap\langle 7,24]$; $C=\mathbf{N}\cap\langle 22,40]$; $D=[(B\cup C)-(C-B)]\cup(A-B')$; $E=C\cup[(A-B)\cup C']'$. Hallar el número de elementos de $D\cap E$.

7. Si $A=\{x\in\mathbf{R} \mid 2x+4<x-7\}$, $B=\{x\in\mathbf{R} \mid x-1<2x<x+8\}$, $C=[1,3]$. De las afirmaciones siguientes, cuántas son verdaderas?

   a) $(B\cup C)-A = B$ b) $(B-C)\cup\langle 1,3\rangle = \langle -1,+\infty\rangle$

   c) $A'-B = [-11,-1]\cup[8,+\infty\rangle$ d) $(A\cup C)\cup\langle -11,1\rangle = \langle -\infty,3]$

II. Axiomas de adición y multiplicación

1. Para cada número real $a \in R$, demostrar que $a.0 = 0$

2. Para cada número real $a \in R$, demostrar que: $-a = (-1).a$

3. Para cada número real $a,b \in R$, demostrar que $(-a).(-b) = a.b$

4. $\forall\, a,b \in R$, demostrar que $a.(-b) = -(a.b)$

5. Si $a > 0, b > 0$ tal que $a + b = 1$, demostrar que: $ab \leq \frac{1}{4}$

6. Demostrar que sí $a < b$, Entonces $a < \frac{a+b}{2} < b$

7. Para $a,b \in R$, si $a < b \Rightarrow -a > -b$

8. Para $a \in R$, $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

9. Sí $a, b, c \in R$, donde $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a.c > b.c$

10. Sí $a.b > 0$ y $a^2 > b^2 \Rightarrow a > b$

11. Para $a \in R, a \neq 0$ entonces a^{-1} tiene el mismo signo que "a"

12. Si $a \geq b \geq 0$, Demostrar que: $a^2 \geq b^2$, donde $a,b \in R$.

CONCEPTOS

1. Dé un ejemplo de:

(a) Un número natural

(b) Un entero que no sea número natural

(c) Un número racional que no sea entero

(d) Un número irracional

2. Complete cada enunciado y mencione la propiedad de números reales que haya empleado.

(a) $ab =$ ________; ________ Propiedad

(b) $a + (b + c) =$ ________; ________ Propiedad

(c) $a(b + c) =$ ________; ________ Propiedad

3. El conjunto de números entre 2 y 7, pero que no los incluye, se puede escribir como sigue:

________en notación constructiva de conjuntos y

________en notación de intervalos.

4. El símbolo $|x|$ representa la _______del número x. Si x no es 0, entonces el signo $|x|$ es siempre_______.

HABILIDADES

5-6 ■ Mencione los elementos del conjunto dado que sean

(a) números naturales

(b) números enteros

(c) números racionales

(d) números irracionales

5. $\{0, -10, 50, \frac{22}{7}, 0.538, \sqrt{7}, 1.2\overline{3}, -\frac{1}{3}, \sqrt[3]{2}\}$

6. $\{1.001, 0.333\ldots, -\pi, -11, 11, \frac{13}{15}, \sqrt{16}, 3.14, \frac{15}{3}\}$

7-14 ■ Exprese la propiedad de los números reales que se use.

7. $7 + 10 = 10 + 7$

8. $2(3 + 5) = (3 + 5)2$

9. $(x + 2y) + 3z = x + (2y + 3z)$

10. $2(A + B) = 2A + 2B$

11. $(5x + 1)3 = 15x + 3$

12. $(x + a)(x + b) = (x + a)x + (x + a)b$

13. $2x(3 + y) = (3 + y)2x$

14. $7(a + b + c) - 7(a + b) + 7c$

15-18 ■ Reescriba la expresión usando la propiedad dada de los números reales.

15. Propiedad Conmutativa de la adición, $x + 3 =$

16. Propiedad Asociativa de la multiplicación, $7(3x) =$

17. Propiedad Distributiva, $4(A + B) =$

18. Propiedad Distributiva, $5x + 5y =$

19-24 ■ Use propiedades de números reales para escribir la expresión sin paréntesis.

19. $3(x + y)$ **20.** $(a - b)8$

21. $4(2m)$ **22.** $\frac{4}{3}(-6y)$

23. $-\frac{5}{2}(2x - 4y)$ **24.** $(3a)(b + c - 2d)$

25-30 ■ Ejecute las operaciones indicadas.

25. **(a)** $\frac{3}{10} + \frac{4}{15}$ **(b)** $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

26. **(a)** $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$ **(b)** $1 + \frac{5}{8} - \frac{1}{6}$

27. **(a)** $\frac{2}{3}(6 - \frac{3}{2})$ **(b)** $0.25(\frac{8}{9} + \frac{1}{2})$

28. **(a)** $(3 + \frac{1}{4})(1 - \frac{4}{5})$ **(b)** $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$

29. **(a)** $\dfrac{2}{\frac{2}{3}} - \dfrac{\frac{2}{3}}{2}$ **(b)** $\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{9}}$

30. **(a)** $\dfrac{2 - \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$ **(b)** $\dfrac{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{10} + \frac{3}{15}}$

31-32 ■ Ponga el símbolo correcto ($<$, $>$, o $=$) en el espacio.

31. **(a)** $3 \;\square\; \frac{7}{2}$ **(b)** $-3 \;\square\; -\frac{7}{2}$ **(c)** $3.5 \;\square\; \frac{7}{2}$

32. **(a)** $\frac{2}{3} \;\square\; 0.67$ **(b)** $\frac{2}{3} \;\square\; -0.67$ **(c)** $|0.67| \;\square\; |-0.67|$

33-36 ■ Diga si cada desigualdad es verdadera o falsa.

33. **(a)** $-6 < -10$ **(b)** $\sqrt{2} > 1.41$

34. **(a)** $\dfrac{10}{11} < \dfrac{12}{13}$ **(b)** $-\dfrac{1}{2} < -1$

35. **(a)** $-\pi > -3$ **(b)** $8 \le 9$

36. **(a)** $1.1 > 1.\overline{1}$ **(b)** $8 \le 8$

37-38 ■ Escriba cada enunciado en términos de desigualdades.

37. **(a)** x es positivo

(b) t es menor a 4

(c) a es mayor o igual a π

(d) x es menor a $\frac{1}{3}$ y mayor a -5

(e) La distancia de p a 3 es como máximo 5

38. **(a)** y es negativa

(b) z es mayor a 1

(c) b es como máximo 8

(d) w es positiva y menor o igual a 17

(e) y está al menos 2 unidades de π

39-42 ■ Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}$$
$$C = \{7, 8, 9, 10\}$$

39. **(a)** $A \cup B$ **(b)** $A \cap B$

40. **(a)** $B \cup C$ **(b)** $B \cap C$

41. **(a)** $A \cup C$ **(b)** $A \cap C$

42. **(a)** $A \cup B \cup C$ **(b)** $A \cap B \cap C$

43-44 ■ Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{x \mid x \ge -2\} \qquad B = \{x \mid x < 4\}$$
$$C = \{x \mid -1 < x \le 5\}$$

43. **(a)** $B \cup C$ **(b)** $B \cap C$

44. **(a)** $A \cap C$ **(b)** $A \cap B$

45-50 ■ Exprese el intervalo en términos de desigualdades y, a continuación, grafique el intervalo.

45. $(-3, 0)$ **46.** $(2, 8]$

47. $[2, 8)$ **48.** $[-6, -\frac{1}{2}]$

49. $[2, \infty)$ **50.** $(-\infty, 1)$

51-56 ■ Exprese la desigualdad en notación de intervalos y, a continuación, grafique el intervalo correspondiente.

51. $x \le 1$ **52.** $1 \le x \le 2$

53. $-2 < x \le 1$ **54.** $x \ge -5$

55. $x > -1$ **56.** $-5 < x < 2$

57–58 ■ Exprese cada conjunto en notación de intervalos.

57. **(a)** −3 0 5

(b) −3 0 5

58. **(a)** 0 2

(b) −2 0

59-64 ■ Grafique el conjunto.

59. $(-2, 0) \cup (-1, 1)$ **60.** $(-2, 0) \cap (-1, 1)$

61. $[-4, 6] \cap [0, 8)$ **62.** $[-4, 6) \cup [0, 8)$

63. $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$ **64.** $(-\infty, 6] \cap (2, 10)$

65-70 ■ Evalúe cada expresión.

65. **(a)** $|100|$ **(b)** $|-73|$

66. **(a)** $|\sqrt{5} - 5|$ **(b)** $|10 - \pi|$

67. **(a)** $||-6| - |-4||$ **(b)** $\dfrac{-1}{|-1|}$

68. **(a)** $|2 - |-12||$ **(b)** $-1 - |1 - |-1||$

69. **(a)** $|(-2) \cdot 6|$ **(b)** $|(-\frac{1}{3})(-15)|$

70. **(a)** $\left|\dfrac{-6}{24}\right|$ **(b)** $\left|\dfrac{7 - 12}{12 - 7}\right|$

71-74 ■ Encuentre la distancia entre los números dados.

71.

72.



73. **(a)** 2 y 17 **(b)** −3 y 21 **(c)** $\frac{11}{8}$ y $-\frac{3}{10}$

74. **(a)** $\frac{7}{15}$ y $-\frac{1}{21}$ **(b)** −38 y −57 **(c)** −2.6 y −1.8

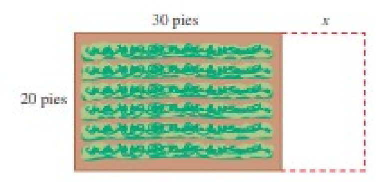
75-76 ■ Exprese cada decimal periódico como una fracción. (Vea la nota al margen en la página 2.)

75. **(a)** $0.\overline{7}$ **(b)** $0.2\overline{8}$ **(c)** $0.\overline{57}$

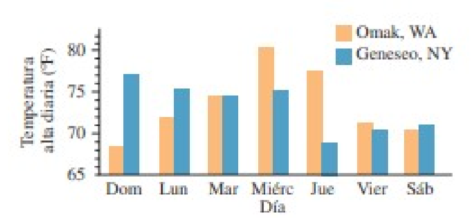
76. **(a)** $5.\overline{23}$ **(b)** $1.3\overline{7}$ **(c)** $2.\overline{135}$

APLICACIONES

77. Área de un jardín El jardín de legumbres de Mary mide 20 pies por 30 pies, de modo que su área es de $20 \times 30 = 600$ pies². Ella decide agrandarlo, como se ve en la figura, para que el área aumente a $A = 20(30 + x)$. ¿Cuál propiedad de los números reales nos dice que la nueva área también se puede escribir como $A = 600 + 20x$?



78. Variación de temperatura La gráfica de barras muestra las altas temperaturas diarias para Omak, Washington, y Geneseo, Nueva York, durante cierta semana en junio. Represente con T_O la temperatura en Omak y T_G la temperatura en Geneseo. Calcule $T_O - T_G$ y $|T_O - T_G|$ para cada día que se muestra. ¿Cuál de estos dos valores da más información?



79. Envío de un paquete por correo La oficina de correos sólo aceptará paquetes para los cuales la longitud más la circunferencia no sea de más de 108 pulgadas. Así, para el paquete de la figura, debemos tener

$$L + 2(x + y) \le 108$$

(a) ¿La oficina de correos aceptará un paquete de 6 pulgadas de ancho, 8 pulgadas de profundidad y 5 pies de largo? ¿Y un paquete que mida 2 pies por 2 pies por 4 pies?

(b) ¿Cuál es la máxima longitud aceptable para un paquete que tiene una base cuadrada que mide 9 pulgadas por 9 pulgadas?

